

94. MESURE des ANGLES du PLAN EUCLIDIEN ORIENTÉ

Pour réaliser la mesure des angles du plan euclidien orienté Π, Σ on se sert d'un modèle parfait du groupe topologique des angles $A, +, \tau_{ms}$ constitué par un cercle pointé de longueur $\gg 1$ et dont le rayon $r \gg \frac{1}{2\pi}$ fixe l'unité d'angle et vice versa. L'orientation du plan orienté le cercle modèle, ce qui fixera l'enroulement métrique qui effectue la mesure.

*

Dans le Plan Euclidien orienté Π, Σ .

- ▲ $A_r =$ cercle modèle du groupe topologique des angles de rayon $r \gg \frac{1}{2\pi}$ et orienté par Σ

A_r est donc identifié à A : c'est un cercle gradué en angles.

Tout point est marqué par un angle qui le désigne
 Tout angle marque un et un seul point de a .

- ▲ $\forall \alpha \in A$ $\text{long}_r \alpha =$ longueur de l'intervalle non vide $[\vec{0}, \alpha[$ de A_r

- ▲ $e_r =$ enroulement métrique $\mathbb{R} \rightarrow A_r, \Sigma$

$$\forall x \geq \frac{1}{2\pi}$$

$$\text{mes}_x : A \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} : \alpha \mapsto e^{-i\alpha}$$

$$\forall \alpha \in A : \text{mes}_x \alpha = \text{long}_x \alpha + 2\pi\mathbb{Z}$$

$$\text{long}_x \alpha = \text{VALEUR PRINCIPALE de } \text{mes}_x \alpha$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \text{Unité (d'angle) de la mesure } \text{mes}_x \\ &= \text{angle dont la mesure par } \text{mes}_x \text{ égale } +2\pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Pour légitimer cette définition, il convient de prouver que long_x ne dépend pas du choix particulier du modèle A_x .

$$\diamond A'_x, \Sigma \text{ long}'_x \blacktriangle$$

► d déplacement de π qui applique A_x sur A'_x
et le zéro de A_x sur celui de A'_x

* d conserve les angles
applique le point de A_x marqué α sur le point de A'_x marqué α .

d est un isomorphisme de cycles orientés métriques

$$A_x \rightarrow A'_x$$

la longueur de $[\vec{0}_\alpha] \subset A_x$ égale la longueur
de $[\vec{0}_\alpha] \subset A'_x$

$$\text{long}_x = \text{long}'_x \blacktriangle$$

□ L'application $(\frac{1}{2\pi}, +\infty[\rightarrow A : x \mapsto E_x$ est bijective.

□ SURJECTIVE

▲ $\alpha \in A \quad \wedge \quad \text{long}_x \alpha = k \in [0, 2\pi x[$

* Par homothétie $\text{long}_{x/k} \alpha = 1.$

$$\alpha = E_{x/k}$$

□ INJECTIVE

▲ $x > \frac{1}{2\pi} \quad \wedge \quad s > \frac{1}{2\pi} \quad \wedge \quad x \neq s \quad \wedge \quad E_x = \alpha$

* $\text{long}_x \alpha = 1.$

Par homothétie $\text{long}_s \alpha \neq 1 \quad \wedge \quad E_s \neq \alpha$

la réciproque de la bijection $x \mapsto E_x \quad (x > 1/2\pi)$
est notée $E \mapsto x_E$

$$\text{mes}_E = \text{mes}_{x_E}$$

Tout angle est unité d'une mesure d'angles.

$$\varepsilon_1 = \text{radian}$$

$$\varepsilon_{\frac{1}{2\pi}} = \text{angle nul (mesure en tours)}$$

$$\varepsilon_{\frac{360}{2\pi}} = \text{degré}$$

$$\varepsilon_{\frac{400}{2\pi}} = \text{grade}$$

$$\varepsilon_{\frac{\pi}{2}} = \text{angle droit (positif)}$$

$$\forall \alpha, \varepsilon \in \mathbb{A}$$

$$\alpha = a \varepsilon$$

si

$a = \text{valeur principale de mes}_\varepsilon \alpha$

L'application

277*

$$\left[\frac{1}{2\pi}, +\infty \right[\rightarrow A : r \mapsto \mathcal{E}_r$$

$$\text{où } \text{long}_r \left[\overset{\curvearrowright}{0}, \mathcal{E}_r \right] = 1$$

est bijective

sa réciproque :

$$A \rightarrow \left[\frac{1}{2\pi}, +\infty \right[: \mathcal{E} \mapsto r_{\mathcal{E}}$$

$$\text{où } \text{long}_{r_{\mathcal{E}}} \left[\overset{\curvearrowright}{0}, \mathcal{E} \right] = 1$$

On sait que (cf. chapitre sur les monotones métriques)

$$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall r \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall \alpha \in A$$

$$a \text{ long}_r \alpha = \text{long}_{ar} \alpha$$

où $\text{long}_r \alpha \triangleq$ longueur de l'intervalle $\left[\overset{\curvearrowright}{0}, \alpha \right]$ de A_r
non vide

En vertu de ce qui précède on a :

$$\forall r \geq \frac{1}{2\pi} \quad \forall a \geq \frac{1}{2\pi r} \quad \forall \alpha \in A$$

$$a \text{ mes}_r \alpha = \text{mes}_{ar} \alpha$$

$$\begin{aligned} * \quad a \text{ mes}_r \alpha &= a (\text{long}_r \alpha + 2\pi r \mathbb{Z}) \\ &= \text{long}_{ar} \alpha + 2\pi(ar) \mathbb{Z} = \text{mes}_{ar} \alpha \quad \square \end{aligned}$$

Application R sur le groupe des angles :

27*

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon \in A$$

$a \varepsilon$ est défini par

$$\text{mes}_{\varepsilon} a \varepsilon \triangleq a + 2\pi r_{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Application $\mathbb{R} \rightarrow]0, 2\pi r_{\varepsilon}] : x \mapsto x^*$ où
 $x^* \equiv x \pmod{2\pi r_{\varepsilon}}$

Immédiatement

$$\forall a \in \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon \in A$$

$$\text{long}_{\varepsilon} a \varepsilon = a^*$$

Ayant défini le produit d'un réel par un angle, on peut établir la propriété suivante de la bijection

$$A \rightarrow \left[\frac{1}{2\pi}, +\infty[: \varepsilon \mapsto r_\varepsilon \quad \text{et}$$

$$\text{long}_{r_\varepsilon} \left[\overset{\curvearrowright}{0, \varepsilon} \right] = 1$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon \in A$$

$$a^* r_{a\varepsilon} = r_\varepsilon$$



$$\frac{r_\varepsilon}{a^*} > \frac{1}{2\pi}$$

$$\text{long}_{\frac{r_\varepsilon}{a^*}} \left[\overset{\curvearrowright}{0, a\varepsilon} \right] = \frac{1}{a^*} \text{long}_{r_\varepsilon} \left[\overset{\curvearrowright}{0, a\varepsilon} \right]$$

$$= \frac{1}{a^*} a^* = 1 = \text{long}_{r_{a\varepsilon}} \left[\overset{\curvearrowright}{0, a\varepsilon} \right]$$

$$\vdash r_{a\varepsilon} = \frac{r_\varepsilon}{a^*}$$

$$a^* r_{a\varepsilon} = r_\varepsilon \quad \blacksquare$$

$$\forall \alpha, \varepsilon \in A \quad \forall a \in R$$

277::

$$\text{mes}_{\varepsilon} \alpha = a^* \cdot \text{mes}_{a\varepsilon} \alpha$$

$$\text{mes}_{r\varepsilon} \alpha = a^* \cdot \text{mes}_{ra\varepsilon} \alpha$$

$$a^* \cdot \text{mes}_{ra\varepsilon} \alpha = a^* \cdot \text{mes}_{\frac{1}{a^*}r\varepsilon} \alpha \quad (\text{f.p. 3})$$

$$= a^* \cdot \frac{1}{a^*} \text{mes}_{r\varepsilon} \alpha \quad \begin{matrix} (\text{f.p. 1}) \\ (\frac{1}{a^*} \Rightarrow \frac{1}{a^*r\varepsilon}) \end{matrix}$$

$$= \text{mes}_{r\varepsilon} \alpha \quad \blacksquare$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon \in A$$

$$a \cdot b \varepsilon = ab^* \varepsilon$$

$$\text{oi } b^* \equiv b \pmod{2\pi r_\varepsilon} \\ \in]0, 2\pi r_\varepsilon]$$

$$\square \text{mes}_\varepsilon a \cdot b \varepsilon = ab + 2\pi r_\varepsilon \mathbb{Z} \quad (\text{f.p.2})$$

$$\ast \text{mes}_{b\varepsilon} a \cdot b \varepsilon = a + 2\pi r_{b\varepsilon} \mathbb{Z} \quad (\text{f.p.2})$$

$$b^* \text{mes}_{b\varepsilon} a \cdot b \varepsilon = \text{mes}_\varepsilon a \cdot b \varepsilon \quad (\text{f.p.4})$$

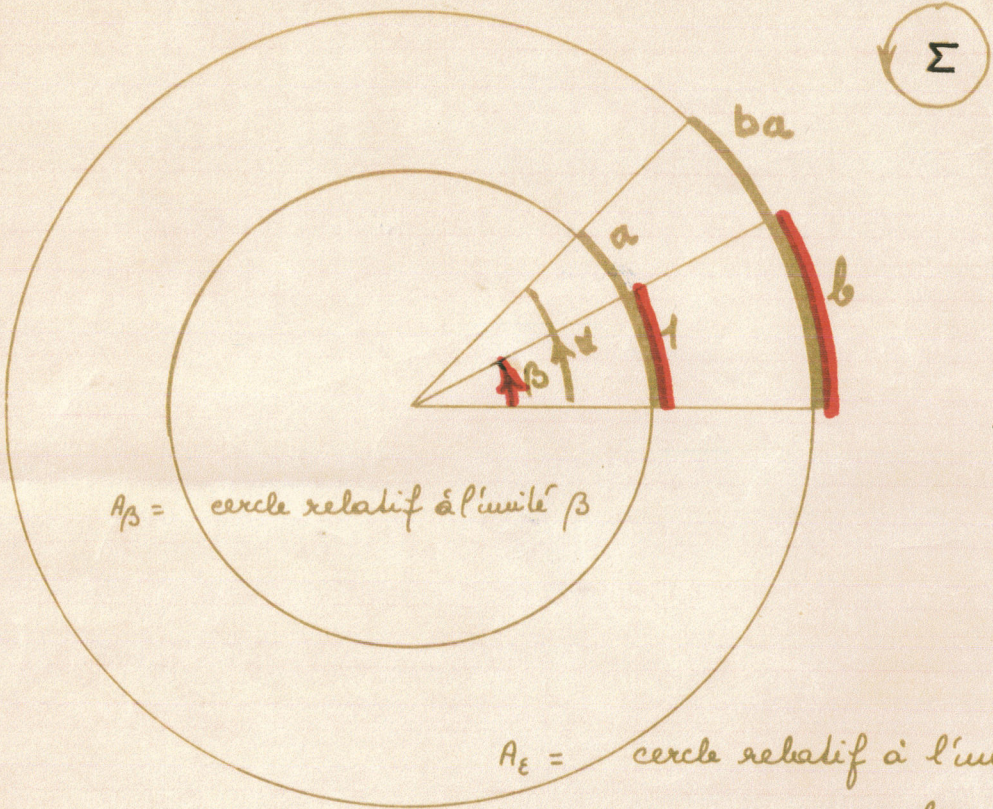
$$\begin{aligned} \vdash \text{mes}_\varepsilon a \cdot b \varepsilon &= b^* \text{mes}_{b\varepsilon} a \cdot b \varepsilon \\ &= b^* (a + 2\pi r_{b\varepsilon} \mathbb{Z}) \\ &= ab^* + 2\pi b^* r_{b\varepsilon} \mathbb{Z} \\ &= ab^* + 2\pi r_\varepsilon \mathbb{Z} \quad (\text{f.p.3}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$\forall a, b \in R$

$\forall \epsilon \in A$

$$a \cdot b\epsilon = ab \cdot \epsilon$$

*



$A_\beta =$ cercle relatif à l'unité β

$A_\epsilon =$ cercle relatif à l'unité $\epsilon \dots$

\dots pour laquelle $\text{mes}_\epsilon \beta = b$



Rectification du quart de cercle

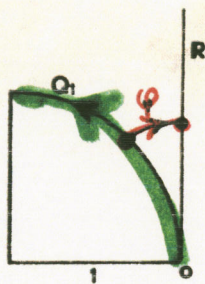


FIG. 10

La fonction $\varphi: Q_1 \rightarrow R: p \rightarrow$ longueur (euclidienne) de l'intervalle $[op]$ est strictement croissante, en vertu de 10(1). Sa continuité est évidente:

Pour tout voisinage $W =]\varphi p - \varepsilon, \varphi p + \varepsilon[$ de φp , la trace sur Q_1 du taxi-disque de centre p , et de rayon ε est un voisinage V de p tel que $\varphi V \subset W$ ■

Mais Q_1 étant homéomorphe à un segment réel fermé, le théorème des valeurs intermédiaires [Arlon 8], s'applique

- φ est une surjection $Q_1 \rightarrow [0; \pi/2]$
- un iso d'ordonnés $Q_1, \leq \rightarrow [0; \pi/2], \leq$
- un homéo $Q_1, \zeta_\varepsilon \rightarrow [0; \pi/2], \zeta_{us}$
- un iso d'espaces métriques $Q_1, e_\varepsilon \rightarrow [0; \pi/2], d_{us}$

(ζ_{us} désigne la topologie usuelle de l'intervalle fermé $[0, \pi/2]$ et d_{us} note la distance usuelle de ce segment: $d_{us}(r, s) = |r - s|$)

φ rectifie le quart de cercle

Enroulement

La réciproque φ^{-1} de la rectification $\varphi: Q_1 \rightarrow [0, \pi/2]$ applique isométriquement $[0, \pi/2] \rightarrow Q_1, e_\varepsilon$ et amorce un enroulement $R^+ \rightarrow \Gamma$

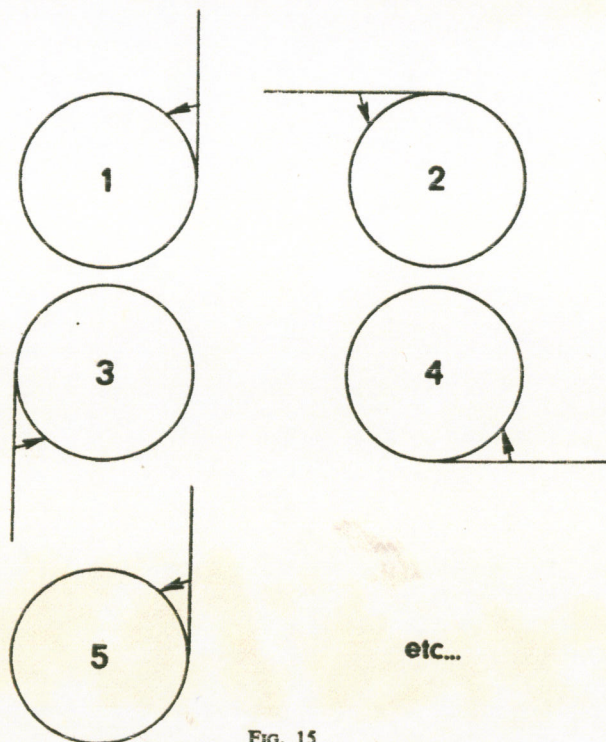


FIG. 15

Calmons la frustration contestataire des réels négatifs en prolongeant cette fonction

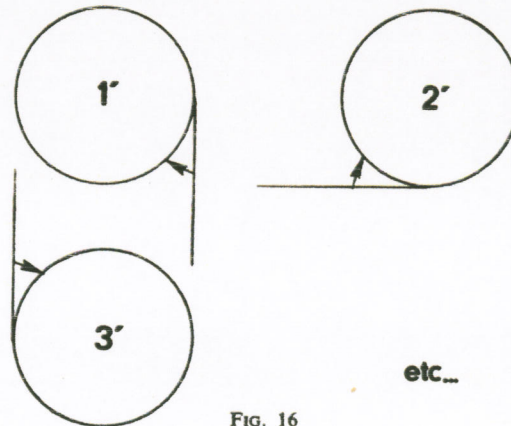


FIG. 16

Ainsi se trouve défini l'enroulement $\psi: \mathbf{R} \rightarrow \Gamma$ fonction continue de période 2π .

Il sera souvent commode de poser $\tilde{r} = \psi r$.

Ce qui permet l'entrée d'un personnage folklorique, haut en couleur!

$$\tilde{1} = 1 \text{ . radian}$$

Plus généralement

$$\tilde{r} = r \text{ . rad}$$

\tilde{r} est l'angle dont UNE mesure en radians égale r .

$\{r + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} =$ ensemble des mesures radianes de \tilde{r} .

On a volontairement passé sous silence, ci-dessus, qu'il existe deux enroulements $\mathbf{R} \rightarrow \Gamma$.

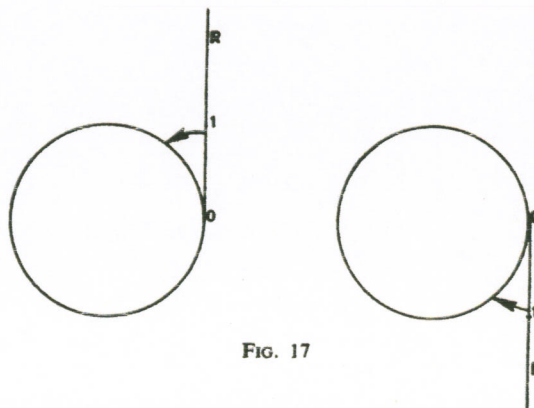


FIG. 17

Nous supposons toujours qu'un enroulement a été choisi et nommé $\psi: r \mapsto \bar{r}$, ce qui équivaut à décider lequel des deux angles droits du plan euclidien admet la mesure radianne $\pi/2$ (l'autre ayant aussitôt la mesure $-\pi/2$).

Epimorphisme

Toute fonction continue non monotone d'intervalle réel dans \mathbf{R} présente l'une ou l'autre des situations

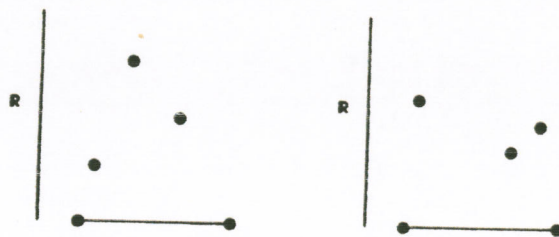


FIG. 18

et le théorème des valeurs intermédiaires lui impose d'être non injective. Aussitôt, pour tout $s \in [0; \pi/2]$ tout homéo h du sous-arc $[\delta, s]$ du demi-cercle D sur un sous-arc de ce demi-cercle.



FIG. 19

est croissante ou décroissante, et, toujours par application du théorème des valeurs intermédiaires, son image égale $[h\delta, hs]$. Il en est ainsi en particulier de l'endo $\bar{r}+$ de $\Gamma, +$, supporté par la rotation de centre c et d'angle \bar{r} , (avec $r \in [0, \pi/2]$). Mais, en ce cas, le caractère isométrique de la rotation entraîne la conservation des longueurs d'arc.

D'où $\bar{r} + [\delta, s] = [\bar{r}, \bar{r} + s]$ et $\text{long}[\bar{r}, \bar{r} + s] = s$.

Pour $r = s \in]0, \pi/2[$:

$$\bar{r} + [\delta, \bar{r}] = [\bar{r}, 2\bar{r}] \text{ et } \text{long}[\bar{r}, 2\bar{r}] = r$$

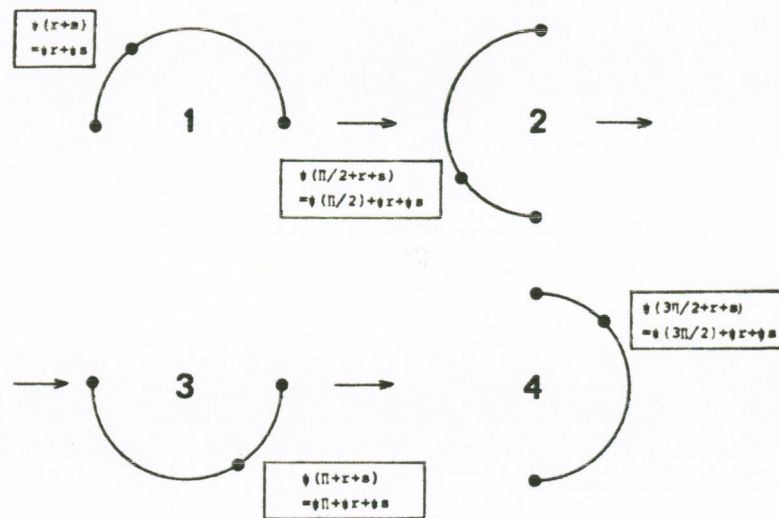
et la dernière égalité impose $2\bar{r} = \delta$ ou $2\bar{r} = \widehat{2r}$.

Mais \widehat{r} n'étant ni nul, ni plat, $2\widehat{r} \neq \widehat{\partial}$, d'où $2\widehat{r} = \widehat{2r}$.

On en conclut en particulier que l'application $\widehat{r} + : [\widehat{\partial}, \widehat{r}] \rightarrow [\widehat{r}, 2\widehat{r} = \widehat{2r}]$ est croissante stricte. Il en est encore ainsi de la restriction de $\widehat{r} +$ à $[\widehat{\partial}, \widehat{s}]$, pour tout $s \in [0, r]$ (et $r \in [0, \pi/2]$). D'où, immédiatement

$$\widehat{r} + [\widehat{\partial}, \widehat{s}] = [\widehat{r}, \widehat{r} + \widehat{s} = \widehat{r+s}] \quad \boxed{\widehat{r} + \widehat{s} = \widehat{r+s}}$$

Le « quart de tour » $(\pi/2) +$ définit les isométries



etc...

FIG. 20

De manière générale

$$\begin{aligned} \psi(k\pi/2 + r + s) &= \psi(k\pi/2) + \psi r + \psi s \\ &= k\psi(\pi/2) + \psi r + \psi s \end{aligned}$$

On en déduit successivement, pour tous $h, k \in \mathbb{Z}$ et tous $r, s \in [0, \pi/2]$

$$\begin{aligned} &\psi((k\pi/2 + r) + (h\pi/2 + s)) \\ &= \psi((k+h)\pi/2 + (r+s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (k + h)\psi(\pi/2) + \psi r + \psi s \\
 &= (k\psi(\pi/2) + \psi r) + (h\psi(\pi/2) + \psi s) \\
 &= \psi(k\pi/2 + r) + \psi(h\pi/2 + s)
 \end{aligned}$$

ce qui établit le théorème fondamental

Théorème de l'enroulement

L'enroulement isométrique euclidien ψ est un épimorphisme du groupe $\mathbb{R}, +$ sur le groupe des angles $\Gamma, +$.

21. Fonctions circulaires de variable réelle

Elles se définissent toutes comme le sinus de variable réelle:

$$\sin r = \sin \tilde{r}$$

(En le premier membre *sin* désigne le sinus de variable réelle, tandis qu'en le second *sin* désigne le sinus d'angle)

Notant p la projection orthogonale numérique

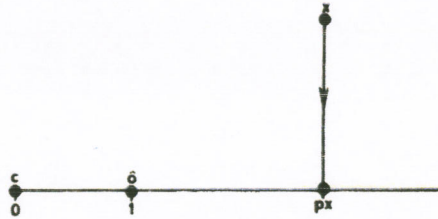


FIG. 21

le cosinus de variable réelle égale $p \circ \psi$ et le sinus de variable réelle égale $q \circ \psi$ (avec une définition évidente de d), ce qui assure la continuité de ces fonctions circulaires de variable réelle.

Par l'épimorphisme d'enroulement:

$$\sin(x + y) = \sin(\overline{x + y}) = \sin(\tilde{x} + \tilde{y}) = \dots \text{etc}$$

et toutes les formules relatives aux fonctions circulaires d'angles se transfèrent aux fonctions circulaires de variable réelle.

L'homme a cru sa terre plate parce qu'un fragment de sphère semble plan. Le physicien confond volontiers un petit arc et sa corde. Le mathématicien élucide la question

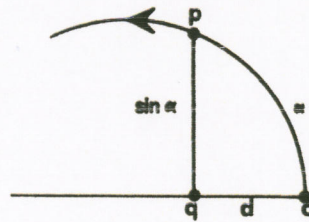


FIG. 11

en établissant la formule fondamentale

$$\lim_0 \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$$

où α désigne la longueur euclidienne de l'arc $[op]$ et $\sin \alpha$, longueur de pq , est clairement fonction de α . Le rapport $\alpha/\sin \alpha$ est exprimé au moyen du paramètre α . On aurait pu prendre d'autres paramètres. Pour le calcul effectif, on exprimera les termes α et $\sin \alpha$ de la fraction en fonction du paramètre d .

Et on calculera $\lim_0 \frac{\alpha(d)}{(\sin \alpha)(d)}$

17. Changement de variable

Le fait que la limite résiste au changement de variable, ne doit être ni escamoté, ni constituer la cause d'explications lourdes. Il suffit de le mettre une bonne fois en évidence, en toute généralité et de l'utiliser ensuite avec souplesse sans référence freinante.

Voici deux espaces topologiques A, B liés par un homéo h noté par une ligne non fléchée afin de n'avantager ni l'un ni l'autre. Le petit muret indique que les dessins sont tracés en chambres séparées, sans tenir compte de leurs incidences éventuelles. (Dans le cas traité en 16, les espaces A et B égalent $\mathbf{R}, \mathcal{Z}_{uv}$).

Les fonctions $f:A \rightarrow T$; $g:B \rightarrow T$; à valeurs dans un espace topologique T sont liées par l'homéo h .

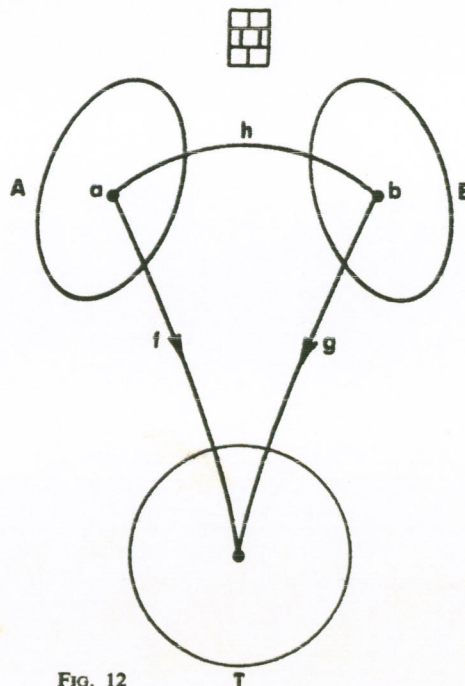


FIG. 12

L'homéomorphie h est un isomorphisme appliquant chacune des SITUATIONS

$$f: A, a \rightarrow T \quad g: B, b \rightarrow T \quad \text{sur l'autre.}$$

(Le phénomène est *paramétré* tantôt par A, a et tantôt par B, b). Clairement

$$\lim_a f = \lim_b g$$

Un point, c'est tout!

18. $\lim \alpha / \sin \alpha = 1$

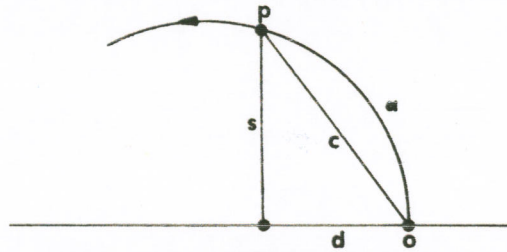


FIG. 13

distance euclidienne $e(o,p)$	<	longueur euclidienne de $[op]$	\leq	taxilongueur de $[o,p]$
$s \leq c$		$\leq \alpha \leq$		$s + d$

— Jeu de métriques —

Nous venons d'utiliser trois distances sur l'arc de cercle $[o,p]$

On doit prouver $\lim \frac{\alpha}{s} = 1$

Comme
$$1 \leq \frac{\alpha}{s} \leq \frac{s+d}{s} = 1 + \frac{d}{s}$$

il revient à établir
$$\lim \frac{d}{s} = 0$$

ou, ce qui est équivalent
$$\lim \frac{d^2}{s^2} = 0$$

Application : Calcul de la dérivée de \sin

$$\begin{aligned} \sin' a &= \lim_a \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_a \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x-a} \\ &= \lim_a \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \lim_a \cos \frac{x+a}{2} = \cos a \end{aligned}$$

- 77